



Kangourou Sans Frontières



Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy
i Nauk Matematycznych

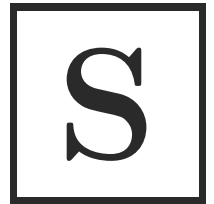
Międzynarodowy Konkurs Matematyczny KANGUR 2016

Student

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!



Pytania po 3 punkty

1. Wartość wyrażenia $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ jest równa

- A) $\frac{3}{111}$. B) $\frac{111}{1110}$. C) $\frac{111}{1000}$. D) $\frac{3}{1000}$. E) $\frac{3}{1110}$.

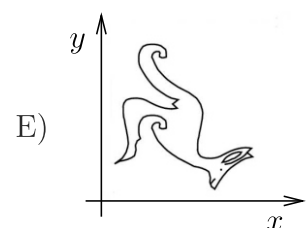
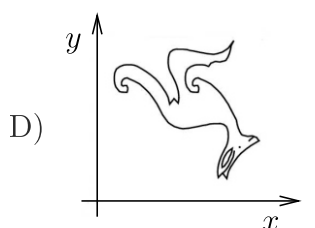
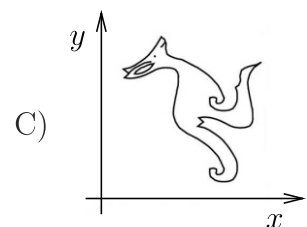
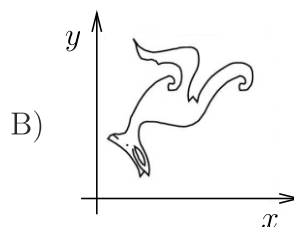
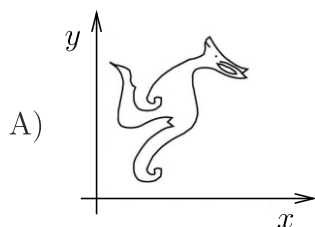
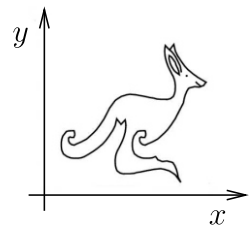
2. Kacper i Melchior mają razem 35 lat, Melchior i Baltazar mają razem 36 lat, a Baltazar i Kacper mają razem 37 lat. Ile lat ma najstarszy z nich?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

3. Ostatnia cyfra iloczynu wszystkich trzycyfrowych liczb nieparzystych jest równa

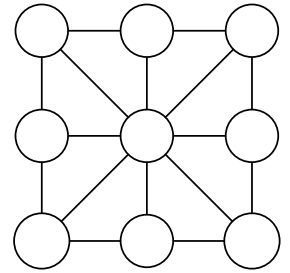
- A) 1. B) 3. C) 5. D) 7. E) 9.

4. Rysunek obok przedstawia międzynarodowe logo konkursu „Kangur Matematyczny” umieszczone w układzie współrzędnych Oxy . Jak będzie wyglądał obraz tego logo w przekształceniu $(x, y) \mapsto (y, x)$?



5. Po zwiększeniu pewnej liczby o 3, jej ostatnia cyfra zmalała o k . Ile jest równe k ?
 A) 1 B) 3 C) 6 D) 7 E) Nie można tego jednoznacznie stwierdzić.

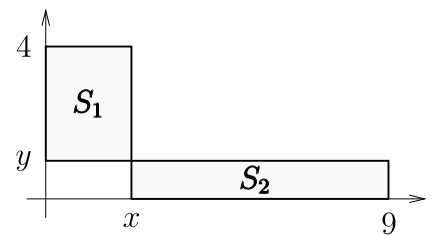
6. Bonawentura chce wpisać we wszystkie koła diagramu (przedstawionego obok) liczby w taki sposób, by sumy liczb w kołach leżących w wierzchołkach każdego z ośmiu małych trójkątów były takie same. Ilu co najwyżej różnych liczb może użyć?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

7. Ile istnieje liczb całkowitych, które są większe niż $2015 \cdot 2017$ i mniejsze niż $2016 \cdot 2016$?
 A) 2017 B) 2016 C) 2015 D) 1 E) Ani jedna.

8. Prostokąty S_1 i S_2 na rysunku obok mają równe pola. Ile wynosi $\frac{x}{y}$?



- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{13}{5}$ E) $\frac{9}{4}$

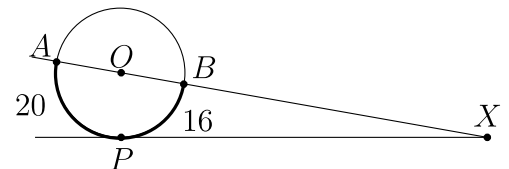
9. Jeżeli $x^2 - 4x + 2 = 0$, to $x + \frac{2}{x}$ jest równe
 A) -4. B) -2. C) 0. D) 2. E) 4.

10. Dodatnie liczby całkowite a, b, c, d spełniają zależność: $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Która spośród liczb a, b, c i d jest największa?

- A) a B) b C) c D) d E) Nie można tego stwierdzić.

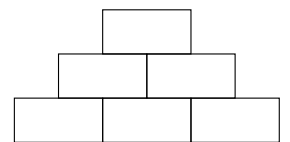
Pytania po 4 punkty

11. Długości łuków AP i BP na rysunku obok są odpowiednio równe 20 i 16. Jaka jest miara kąta AXP ?



- A) 30° B) 24° C) 18° D) 15° E) 10°

12. W pola dolnego rzędu przedstawionego obok diagramu Atanazy wpisał liczby naturalne większe niż 1. Następnie wypełnił pozostałe pola stosując zasadę, że w każdym polu umieszczał iloczyn liczb z dwóch pól leżących bezpośrednio pod nim. Która z następujących liczb nie mogła wystąpić w najwyższym polu?



- A) 56 B) 84 C) 90 D) 105 E) 220

13. Definiujemy ciąg (x_n) następująco: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ dla $n \geq 1$. Ile jest równe x_4 ?
 A) 2^{2^3} B) 2^{2^4} C) $2^{2^{11}}$ D) $2^{2^{16}}$ E) $2^{2^{768}}$

14. W prostokącie $ABCD$ długość boku BC jest połową długości przekątnej AC . Niech M będzie takim punktem na boku CD , że $|AM| = |MC|$. Jaka jest miara kąta CAM ?

- A) $12,5^\circ$ B) 15° C) $27,5^\circ$ D) $42,5^\circ$ E) Inna wartość.

15. Ile istnieje prostokątów o polu 2016, których długości boków są liczbami naturalnymi i które można podzielić na 56 identycznych kwadratów?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) Ani jeden.

16. Wyspę Laputa zamieszkują wyłącznie Matematycy – którzy zawsze mówią prawdę, i Krętacze – którzy zawsze kłamią. W czasie swoich podróży dr Guliwer spotkał 7 mieszkańców tej wyspy siedzących wokół okrągłego stołu. Każdy z nich powiedział: *Siedzę pomiędzy dwoma Krętaczami*. Ilu Krętaczy siedziało przy tym stole?

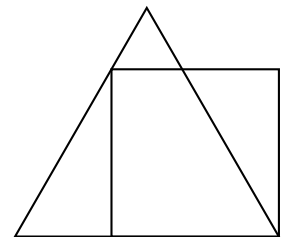
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Brak wystarczającej ilości informacji.

17. Każdy z trójmianów $x^2 + ax + b$ oraz $x^2 + bx + a$ ma pierwiastki rzeczywiste. Wiadomo, że $a \neq b$ i że suma kwadratów pierwiastków pierwszego trójmianu jest równa sumie kwadratów pierwiastków drugiego trójmianu. Ile jest równa wartość sumy $a + b$?

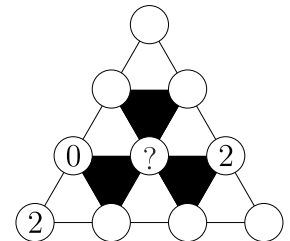
- A) 0 B) -2 C) 4 D) -4 E) Nie można tego wyliczyć.

18. Rysunek obok przedstawia kwadrat i trójkąt równoboczny. Obwód kwadratu jest równy 4. Ile jest równy obwód trójkąta?

- A) 4 B) $3 + \sqrt{3}$ C) 3 D) $3 + \sqrt{2}$ E) $4 + \sqrt{3}$



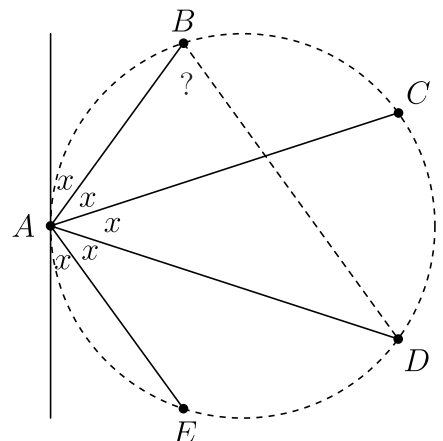
19. W każde z dziesięciu kółek na zamieszczonym obok diagramie wpisano jedną z liczb: 0, 1, 2. Wiadomo, że suma liczb w wierzchołkach każdego białego trójkąta jest podzielna przez 3 i że suma liczb w wierzchołkach każdego czarnego trójkąta nie jest podzielna przez 3. Trzy spośród liczb wpisanych do diagramu zostały ujawnione. Jaka liczba mogła być wpisana w środkowe kółko, oznaczone znakiem zapytania?



- A) Tylko 0. B) Tylko 1. C) Tylko 2. D) Tylko 0 lub 1. E) Każda z liczb 0, 1, 2.

20. Rysunek obok przedstawia pięć punktów na okręgu: A , B , C , D i E , prostą styczną do okręgu w punkcie A oraz cięciwy łączące punkt A z pozostałymi punktami. Kąty oznaczone na rysunku literą x są równe. Jaka jest miara kąta ABD ?

- A) 66° B) $70,5^\circ$ C) 72° D) 75° E) $77,5$



Pytania po 5 punktów

21. W trójkącie ABC o kącie prostym w wierzchołku A dwusieczne kątów ostrych przecinają się w punkcie P . Odległość punktu P od przeciwprostokątnej jest równa $\sqrt{8}$. Jaka jest odległość punktu P od punktu A ?

- A) 8 B) 3 C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{12}$ E) 4

22. Ile rozwiązań ma równanie $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$?

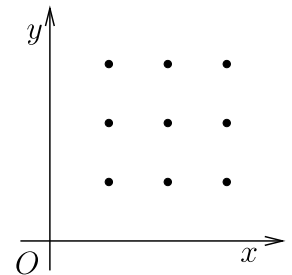
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Nieskończenie wiele.

23. Na okręgu opisano czworokąt. Stosunek obwodu czworokąta do długości okręgu jest równy $4 : 3$. Ile jest równy stosunek pola czworokąta do pola koła ograniczonego tym okręgiem?

- A) $4 : \pi$ B) $3\sqrt{2} : \pi$ C) $16 : 9$ D) $\pi : 3$ E) $4 : 3$

24. Ile funkcji kwadratowych zmiennej x ma wykres przechodzący przez trzy spośród punktów zaznaczonych na rysunku obok?

- A) 6 B) 15 C) 19 D) 22 E) 27



25. Z cyfr od 1 do 9 utworzono trzy liczby 3-cyfrowe, używając każdej z dziewięciu cyfr tylko raz, i liczby te dodano. Która z następujących liczb nie może być równa otrzymanej sumie?

- A) 1500 B) 1503 C) 1512 D) 1521 E) 1575

26. We wnętrzu sześcianu wybrano punkt P i połączono go z wszystkimi wierzchołkami. Otrzymano sześć ostrosłupów. Pięć z nich ma następujące objętości: 2, 5, 10, 11, 14. Jaka jest objętość szóstego ostrosłupa?

- A) 1 B) 4 C) 6 D) 9 E) 12

27. Niech a_n będzie resztą z dzielenia liczby $(n + 1)^3$ przez n^3 . Niech b_n będzie resztą z dzielenia liczby a_n przez 3. Wówczas $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2016}$ jest równe

- A) 672. B) 1008. C) 2016. D) 2015. E) 2014.

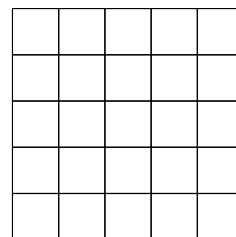
28. Liczba pierwsza p dzieli sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do n , ale nie dzieli żadnego ze składników tej sumy. Która z następujących liczb może być równa sumie $n + p$?

- A) 217 B) 221 C) 229 D) 245 E) 269

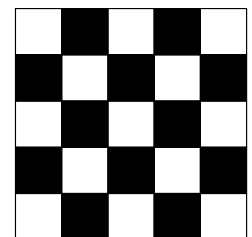
29. Dodatnia liczba całkowita N ma dokładnie sześć dodatnich dzielników (łącznie z 1 i N). Iloczyn pięciu z tych dzielników jest równy 648. Ile jest równy szósty dzielnik?

- A) 4 B) 8 C) 9 D) 12 E) 24

30. Biały kwadrat o wymiarach 5×5 podzielono na 25 kwadratów jednostkowych (rysunek 1). W jednym ruchu wolno zmienić kolor dowolnych trzech kolejnych kwadratów w jednym wierszu lub w jednej kolumnie, przy czym przy takim ruchu kwadraty białe stają się czarne, a kwadraty czarne stają się białe. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów potrzebnych, by otrzymać kwadrat przedstawiony na rysunku 2?



Rysunek 1.



Rysunek 2.

- A) Mniej niż 10. B) 10 C) 12 D) Więcej niż 12. E) Przekształcenie takie jest niemożliwe.