

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny

KANGUR 2018

Student

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

Czas trwania konkursu: 75 minut

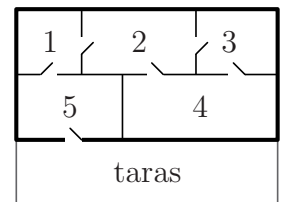
Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!



Pytania po 3 punkty

1. Rysunek przedstawia plan domu Renaty. W którym pokoju znajdzie się Renata, jeśli wejdzie do domu z tarasu i przejdzie przez każde drzwi dokładnie jeden raz?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

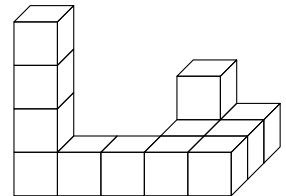


2. Gdy Thor uderza swoim młotem jakikolwiek kamień, ten rozpada się na pięć mniejszych kamieni. Która z poniższych liczb może być liczbą kamieni po kilku uderzeniach młota, jeśli na początku Thor miał siedem kamieni?

- A) 17 B) 20 C) 21 D) 23 E) 25

3. Pokazaną obok bryłę otrzymano przez sklejenie 13 sześciątów. Bryłę tę pomalowano, całkowicie zanurzając ją w pojemniku z farbą. W ilu sześciątach zostały pomalowane dokładnie cztery ściany?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

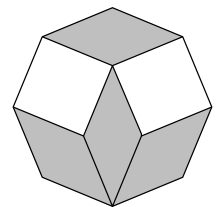


4. Załóżmy, że prawdziwe są następujące dwa zdania: (1) niektórzy kosmici są zieloni, a pozostali są czerwoni; (2) zieloni kosmici mieszkają tylko na Marsie. Wynika stąd, że

- A) wszyscy kosmici żyją na Marsie. B) na Marsie żyją jedynie zieloni kosmici.
C) na Wenus żyją jacyś czerwoni kosmici. D) wszyscy czerwoni kosmici żyją na Wenus.
E) na Wenus nie mieszkają zieloni kosmici.

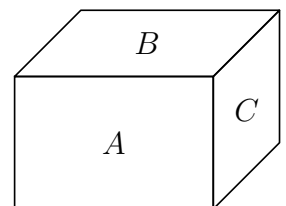
5. Ósmiokąt foremny został ułożony z czterech identycznych rombów i dwóch kwadratów. Jaka jest miara większego z kątów wewnętrznych w tych rombach?

- A) 135° B) 140° C) 144° D) 145° E) 150°



6. Trzy ściany prostopadłościanu stykające się w jednym wierzchołku mają pola powierzchni A , B i C . Który z poniższych wzorów wyraża objętość tego prostopadłościanu?

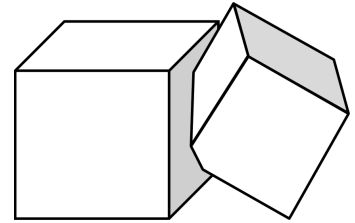
- A) ABC B) \sqrt{ABC} C) $\sqrt{A^2B + B^2C + C^2A}$
D) $\sqrt[3]{ABC}$ E) $2(A + B + C)$



7. W pudełku jest 65 kul, przy czym 8 z nich jest białych, a pozostałe są czarne. W jednym ruchu możemy wyjąć z pudełka nie więcej niż 5 kul. Kule raz wyjęte z pudełka już do niego nie wracają. Jaką najmniejszą liczbę ruchów trzeba wykonać, aby mieć pewność, że została wyjęta przynajmniej jedna biała kula?

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

8. Dwa sześciany A i B o objętościach odpowiednio V i W przecinają się jak na rysunku. Objętość tej części sześcianu A , która nie zawiera się w sześcianie B , jest równa 90% objętości sześcianu A . Podobnie objętość tej części sześcianu B , która nie jest wspólna obu sześcianom, stanowi 85% objętości tego sześcianu. Jaka zależność zachodzi pomiędzy V i W ?



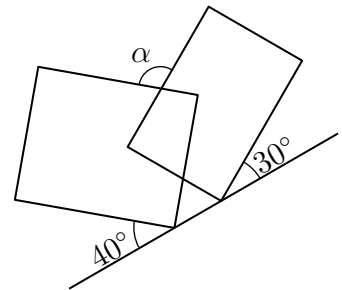
- A) $V = \frac{2}{3}W$ B) $V = \frac{3}{2}W$ C) $V = \frac{85}{90}W$ D) $V = \frac{90}{85}W$ E) $V = W$

9. Na ile sposobów można liczbę 1001 przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych?

- A) Nie można tego zrobić. B) Na jeden sposób. C) Na dwa sposoby.
D) Na trzy sposoby. E) Na więcej niż trzy sposoby.

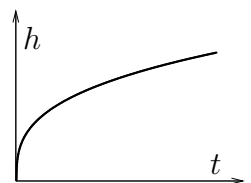
10. Dwa prostokąty są nachylone do linii prostej pod kątem 40° i 30° , jak pokazano na rysunku. Ile jest równa miara kąta α ?

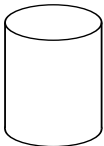
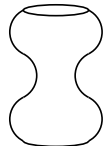
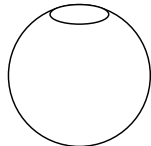
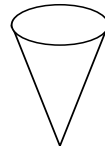

- A) 105° B) 120° C) 130° D) 135° E) Inna wartość.



Pytania po 4 punkty

11. Wazon napełniamy po brzegi równomiernym strumieniem wody. Wykres obok przedstawia poziom wody h w wazonie w zależności od czasu t . Który z rysunków może przedstawiać kształt tego wazonu?



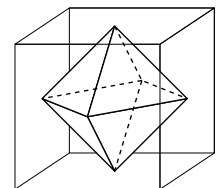
- A)  B)  C)  D)  E) 

12. Ile rozwiązań rzeczywistych ma równanie $||4^x - 3| - 2| = 1$?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. W sześcian o krawędzi 1 wpisano ośmiościan w ten sposób, że wierzchołkami ośmiościanu są środki ścian sześcianu. Ile wynosi objętość ośmiościanu?

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$



14. Spośród pięciu kart oznaczonych liczbami 3, 4, 5, 6 i 7 Anna wybrała trzy, a Beata dostała pozostałe dwie. Każda z nich obliczyła iloczyn liczb na swoich kartach i okazało się, że suma tych iloczynów jest liczbą pierwszą. Ile wynosi suma liczb na kartach Anny?

- A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 18

15. Przed meczem Realu Madryt z Manchesterem United formułowano następujące przewidywania:

1. Mecz nie zakończy się remisem.
2. Real zdobędzie bramkę.
3. Real wygra.
4. Real nie przegra.
5. W meczu padną dokładnie trzy bramki.

Jaki był stosunek liczby bramek zdobytych przez Real do liczby bramek zdobytych przez Manchester, jeśli dokładnie trzy z tych prognoz okazały się prawdziwe?

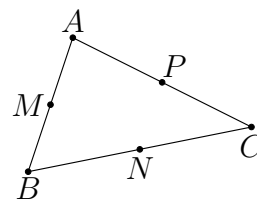
- A) 3 : 0 B) 2 : 1 C) 1 : 2 D) 0 : 3 E) Opisana sytuacja jest niemożliwa.

16. Która z poniższych pięciu liczb nie jest dzielnikiem liczby $18^{2017} + 18^{2018}$?

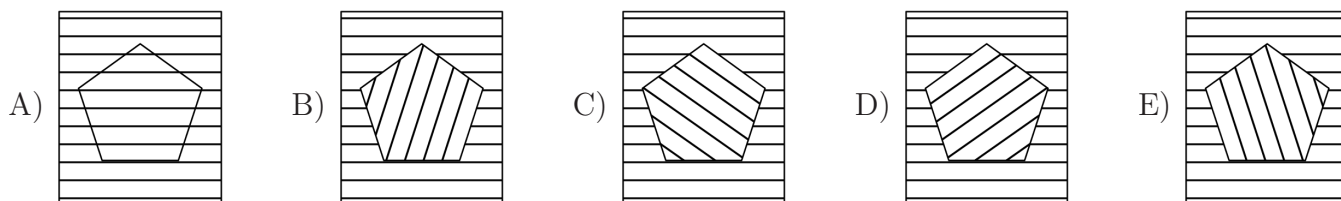
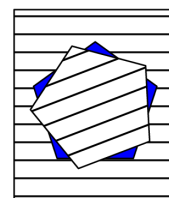
- A) 8 B) 18 C) 28 D) 38 E) 48

17. Środkami boków trójkąta o wierzchołkach $A = (p, q)$, $B = (r, s)$ i $C = (t, u)$ są punkty $M = (-2, 1)$, $N = (2, -1)$ i $P = (3, 2)$ (patrz rysunek). Ile jest równa suma $p + q + r + s + t + u$?

- A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) 5 E) Inna liczba.

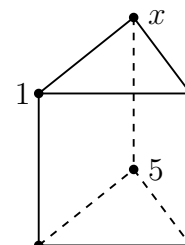


18. Z kartki papieru w linie wycięto pięciokąt foremny. W kolejnych ruchach pięciokąt ten obracamy wokół jego środka o kąt 21° w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wskazówek zegara. Sytuację po pierwszym ruchu pokazuje rysunek. Który z poniższych rysunków pokazuje sytuację w chwili, gdy pięciokąt po raz pierwszy zakryje otwór powstały po jego wycięciu?



19. Powierzchnię graniastoslupa przedstawionego na rysunku tworzą trzy kwadraty i dwa trójkąty. Wierzchołki graniastoslupa oznaczono liczbami od 1 do 6 tak, że suma liczb znajdujących się na każdej ścianie kwadratowej jest taka sama. Pozycje liczb 1 i 5 pokazano na rysunku. Jaka liczba znajduje się w wierzchołku oznaczonym literą x ?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) Taka sytuacja nie jest możliwa.



20. Liczby m i n są rozwiązaniami równania $x^2 - x - 2018 = 0$. Ile wynosi $n^2 + m$?

- A) 2016 B) 2017 C) 2018 D) 2019 E) 2020

Pytania po 5 punktów

21. Czterej bracia A , B , C i D są różnego wzrostu. Oświadczyli oni, co następuje. A powiedział: „Nie jestem ani najniższy, ani najwyższy”, B : „Nie jestem najniższy”, C : „Jestem najwyższy”, a D powiedział: „Jestem najniższy”. Który z nich jest najwyższy, jeśli dokładnie jeden z nich skłamał?

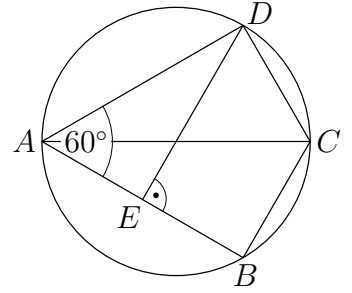
- A) A B) B C) C D) D E) Za mało informacji, aby to stwierdzić.

22. Ile co najwyżej wspólnych dzielników mogą mieć dwie różne liczby dwucyfrowe?

- A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

23. W czworokącie $ABCD$ przekątna AC jest średnicą opisanego na nim okręgu i $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Prostopadła do boku AB poprowadzona przez punkt D przecina odcinek AB w punkcie E , przy czym $|EB| = 3$. Jaka jest długość boku CD ?

- A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

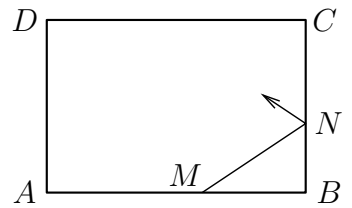


24. Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + px + q$ przecina osie układu współrzędnych w trzech różnych punktach. Okrąg poprowadzony przez te punkty przechodzi przez jeszcze jeden punkt wykresu. Jakie są współrzędne tego punktu?

- A) $(0, -q)$ B) (p, q) C) $(-p, q)$ D) $\left(-\frac{q}{p}, \frac{q^2}{p^2}\right)$ E) $(1, p + q + 1)$

25. Dany jest prostokątny stół bilardowy o bokach 2 m i 3 m. Bila wybita z jednego z dłuższych boków (patrz rysunek) odbiła się od trzech pozostałych boków. W jakiej odległości od punktu A uderzy ona w bok AB , jeśli $BM = 1,2$ m i $BN = 0,8$ m?

- A) 1,2 m B) 1,5 m C) 2 m D) 2,8 m E) 1,8 m

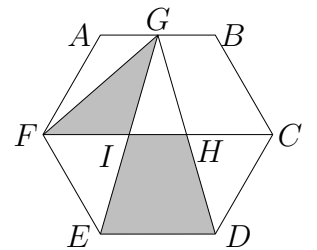


26. Niech f będzie taką funkcją, że $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ dla wszystkich liczb całkowitych x i y . Ile wynosi $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$, jeśli $f(1) = \frac{1}{2}$?

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{15}{8}$ E) 6

27. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ punkt G jest środkiem odcinka AB , a punkty H i I są przecięciami odcinka FC odpowiednio z GD i GE . Jaki jest stosunek pola trójkąta GIF do pola trapezu $IHDE$?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$



28. Liczba chłopaków w klasie jest o 40% większa niż liczba dziewczyn. Ilu uczniów jest w tej klasie, jeśli prawdopodobieństwo, że losowo wybrana dwuosobowa delegacja składa się z chłopaka i dziewczyny, jest równe $\frac{1}{2}$?

- A) 20 B) 24 C) 36 D) 38 E) Taka sytuacja jest niemożliwa.

29. Archimedes wymnożył wszystkie liczby naturalne od 1 do 15 i zapisał wynik na piasku. Niestety cyfry druga i dziesiąta od lewej uległy zatarciu i na piasku pozostał zapis $1 \blacksquare 0767436 \blacksquare 000$. Jakie cyfry uległy zatarciu?

- A) 2 i 0 B) 4 i 8 C) 7 i 4 D) 9 i 2 E) 3 i 8

30. Z sześcianu zbudowanego z 27 małych sześcianów wyjęto 7 małych sześcianów i otrzymano dziurawy sześcian, którego widok od strony każdego z jego wierzchołków przedstawia rysunek. Jak wygląda przekrój dziurawego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez środek sześcianu i prostopadłą do jednej z jego przekątnych?

